TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 305, Number 1, January 1988

ENSEMBLES DE RIESZ

VALÉRIE TARDIVEL

ABSTRACT. Let G be an abelian countable discrete group. We show that there exists no positive characterization of Riesz subsets of G, by proving that the Riesz subsets of G form a coanalytic non-Borel subset of 2^G.

Soit G un groupe abélien discret dénombrable. Nous démontrons qu'il n'existe pas de caractérisation positive des ensembles de Riesz de G, en prouvant que les ensembles de Riesz de G forment un coanalytique non borélien dans 2^G.

Si G est un groupe abélien discret dénombrable, le groupe dual $\hat{G}$ est un compact métrisable. Le spectre d'une mesure μ, élément de $\mathcal{M}(\hat{G})$, est le support de $\hat{\mu}$ dans G discret. Il est noté $S(\mu)$. On notera m ou $d\xi$ la mesure de Haar sur $\hat{G}$. Les notions d'analyse de Fourier utilisées se trouvent dans les deux premiers chapitres du livre de Rudin [**R1**].

Soient E et F, deux espaces polonais. Un ensemble $A \subset E$ est un ensemble analytique, s'il existe un borélien $B \subset E \times F$, tel que A soit la projection de B sur E. Le complémentaire d'un ensemble analytique est un ensemble coanalytique. Les résultats utilisés en théorie descriptive se trouvent dans Dellacherie [**D**].

On note S l'ensemble des suites finies d'entiers. Pour s et s' éléments de S, on note $s < s'$ si s est une section commençante de s'. Si s et s' sont deux éléments de S, on note $\frown{ss'}$ la suite obtenue par concaténation des suites s et s'. On notera $|s|$ la longueur de s.

DEFINITION 1. On appelle *arbre* sur $\mathbf{N}$, un ensemble T de suites finies d'entiers telles que $(n_0, n_1, \ldots, n_k) \in T \Rightarrow (n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}) \in T$. (n_k) est une branche infinie pour T si $\forall k\ (n_0, \ldots, n_k) \in T$. Un arbre T est dit bien fondé, s'il ne contient aucune branche infinie.

Si on identifie un arbre T avec sa fonction caractéristique, l'ensemble $\mathcal{T}$ des arbres sur $\mathbf{N}$ est un sous-ensemble de 2^S. On voit facilement que $\mathcal{T}$ est un fermé de 2^S. Si on le munit de la topologie induite par 2^S, on obtient un compact métrisable.

On a le théorème suivant:

THEOREME 2 [**D**]. *L'ensemble des arbres bien fondés sur* $\mathbf{N}$ *est un ensemble coanalytique non borélien.*

Nous allons maintenant définir les ensembles de Riesz.

DEFINITION 3. Soit G un groupe abélien discret dénombrable. Une partie $\Lambda \subset G$ est un *ensemble de Riesz*, si toute mesure définie sur $\hat{G}$, à spectre contenu dans Λ, est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

Received by the editors January 26, 1986.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 43A46, 04A15.

Key words and phrases. Riesz sets, coanalytic sets, harmonic analysis on compact abelian groups.

REMARQUES. (1) L'ensemble vide est un ensemble de Riesz car $S(\mu) = \emptyset$ entraîne $\mu = 0$.

(2) Toute sous-partie d'un ensemble de Riesz est encore un ensemble de Riesz.

(3) D'après le théorème de F. et M. Riesz, $\mathbf{N}$ est un ensemble de Riesz dans $\mathbf{Z}$ [**R2**].

On appelle τ la topologie induite sur G par le compactifié de Bohr bG de G [**R1**].

Le théorème suivant, est une généralisation d'un résultat dû à Meyer [**M**].

THEOREME 4. *Soit $E \subset G$ un ensemble de Riesz. Soit $\Lambda \subset G$, possédant la propriété suivante: pour tout $x \notin E$, il existe un τ-voisinage ouvert V_x de x tel que $V_x \cap \Lambda$ soit un ensemble de Riesz. Alors Λ est un ensemble de Riesz.*

DEMONSTRATION. Soit μ, un élément de $\mathcal{M}(\hat{G})$, dont le spectre est contenu dans Λ. Nous allons montrer que la partie singulière μ_s, de μ, est nulle. Soit $x \notin E$ et soit V_x un τ-voisinage ouvert de x tel que $V_x \cap \Lambda$ soit un ensemble de Riesz. Il existe alors une mesure atomique σ telle que $\hat{\sigma}(x) = 1$ et $\hat{\sigma} = 0$ sur le complémentaire de V_x [**M**]. Alors, le spectre de $\mu * \sigma$ est contenu dans $V_x \cap \Lambda$, qui est un ensemble de Riesz. On en déduit que $(\mu * \sigma)_s = 0$. Puisque $(\mu * \sigma)_s = \mu_s * \sigma$ [**M**], en passant aux transformées de Fourier, on obtient $\hat{\mu}_s(x) = 0$. Donc, le spectre de μ_s est contenu dans E, qui est ensemble de Riesz. On en déduit que μ_s est nulle, et que Λ est un ensemble de Riesz.

PROPOSITION 5. *Tout ensemble fini est un ensemble de Riesz.*

DEMONSTRATION. Soit $E = \{x_0, \dots, x_k\}$ et soit μ une mesure dont le spectre est contenu dans E. La mesure ν définie par $\nu = \sum_{j=0}^{k} \hat{\mu}(x_j)(\xi, x_j) d\xi$ est telle que $\hat{\nu} = \hat{\mu}$. Donc $\mu = \nu$ et, par conséquent $\mu \ll m$.

DEFINITION 6. Soit (x_k) une suite d'éléments de G. (x_k) est dite *dissociée* si tout élément de G admet au plus une représentation de la forme

$$\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_k x_k \quad \text{où } \varepsilon_k \in \begin{cases} \{-1, 0, 1\} & \text{si } 2x_k \neq 0, \\ \{0, 1\} & \text{si } 2x_k = 0. \end{cases}$$

THEOREME 7. *Soit (x_k) une suite dissociée d'éléments de G. Soit*

$$E = \left\{ \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k x_k | \varepsilon_k = -1, 0, 1 \ si\ 2x_k \neq 0, \ \varepsilon_k = 0, 1 \ si\ 2x_k = 0 \right\}.$$

Alors E n'est pas un ensemble de Riesz.

DEMONSTRATION. Soit (α_k) une suite de réels compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, et ne tendant pas vers 0 à l'infini. Pour tout k élément de $\mathbf{N}$, on définit la fonction P_k par

$$P_k(\xi) = \begin{cases} (1 + \alpha_k \langle x_k, \xi \rangle + \alpha_k \overline{\langle x_k, \xi \rangle}) & \text{si } 2x_k \neq 0, \\ (1 + \alpha_k \langle x_k, \xi \rangle) & \text{si } 2x_k = 0. \end{cases}$$

Pour tout n élément de $\mathbf{N}$, on définit la mesure de probabilité μ_n par

$$\mu_n = \prod_{k=0}^{n} P_k(\xi)\, dm(\xi).$$

$\hat{\mu}_n$ vérifie alors

$$(1)\qquad \begin{cases} \hat{\mu}_n(0) = 1, \\ \hat{\mu}_n(x) = \prod_{k=0}^{j} \alpha_k^{|\varepsilon_k|} & \text{si } x = \sum_{k=0}^{j} \varepsilon_k x_k,\ j \leq n, \\ \hat{\mu}_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après (1), et puisque les mesures μ_n sont des mesures de probabilité, la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ possède une limite vague μ telle que

$$\begin{cases} \hat{\mu}(0) = 1, \\ \hat{\mu}(x) = \prod_{k=0}^{j} \alpha_k^{|\varepsilon_k|} & \text{si } x = \sum_{k=0}^{j} \varepsilon_k x_k, \\ \hat{\mu}(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

μ est une mesure de probabilité dont le support est contenu dans E. Puisque la suite (α_k) ne tend pas vers 0, μ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Haar. E n'est donc pas un ensemble de Riesz.

Notre but, maintenant, est de montrer que $R(G)$, l'ensemble des ensembles de Riesz, n'est pas borélien (Théorème 10). En utilisant les Théorèmes 4 et 7, nous allons associer à tout arbre bien fondé un ensemble de Riesz, et, à tout arbre qui n'est pas bien fondé, un ensemble qui n'est pas un ensemble de Riesz. Nous aurons à établir deux résultats préliminaires. Tout d'abord, nous introduisons sur G une nouvelle topologie.

G est un groupe abélien discret dénombrable. Le compactifié de Bohr de G, bG, est un compact, qui généralement n'est pas métrisable. Cependant, on peut trouver un compact métrisable G^* contenant G. En effet, considérons dans $\hat{G}$, un sous-groupe dénombrable séparant les points de G. Son groupe dual, G^*, est un compact métrisable contenant G. En fait, G^* peut être identifié à un quotient de bG [**R1**]; bG se projette donc sur G^*. Si on note τ^*, la topologie induite sur G par G^*, tout ouvert de G pour τ^* est un ouvert de G pour τ.

LEMME 8. *Soit K un compact métrisable. Soient D un ensemble dénombrable contenu dans K et F un fermé disjoint de K. Alors, il existe des ouverts U_n, deux à deux disjoints, tels que*

(i) $\overline{U}_n \cap F = \emptyset$,

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset D$,

(iii) $U_n \cap D$ *est ouvert et fermé dans* D.

DEMONSTRATION. Soit x un élément de D. D étant dénombrable, on peut trouver $r \in \mathbf{R}^{*+}$ tel que $B(x,r) \cap D$ soit ouvert et fermé dans D, et $\overline{B}(x,r) \cap F = \emptyset$. On en déduit un recouvrement de D par des boules B_n telles que $B_n \cap D$ soit ouvert et fermé dans D, et $B_n \cap F = \emptyset$. Si l'on pose $U_n = B_n \setminus \bigcup_{k<n} \overline{B}_k$, les U_n vérifient les conditions (i), (ii), et (iii) de l'énoncé.

THEOREME 9. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable. Soit G^*, un compact métrisable, contenant G, et induisant sur G la topologie τ^*. Soit $(x_k)_{k\geq 0}$, une suite d'éléments non nuls de G, tendant vers 0 pour la topologie τ^*.*

Alors, pour tout $s \in S$, on peut construire:

(i) *un ensemble*

$$E_s = \left\{ \sum_{k=0}^{|s|-1} \varepsilon_k t_k^{(s)} | \varepsilon_k = -1, 0, 1 \ \textit{si } 2t_k^{(s)} \neq 0, \varepsilon_k = 0, 1 \ \textit{si } 2t_k^{(s)} = 0, t_k^{(s)} \in (x_k) \right\}$$

tel que $s < s' \Rightarrow E_s \subset E_{s'}$;

(ii) *une partition* $(W_j^{(s)})_{j\in\mathbf{N}}$ *en ouverts fermés, pour la topologie induite par* G^*, *de* $G\backslash E_s$;

(iii) *si* $s=\widehat{rk}$, *un ouvert* U_s *de* $G\backslash E_r$, *pour la topologie induite par* G^*, *réunion d'éléments de* $(W_j^{(r)})$ *et vérifiant:*

$$U_{\widehat{rk}}\cap U_{\widehat{rn}}=\varnothing \quad \textit{si } k\neq n,$$

$$E_t\backslash E_r\subset U_{\widehat{rk}} \quad \textit{si } \widehat{rk}<t.$$

DEMONSTRATION. On note $(p_k)_{k\geq 0}$ la suite des nombres premiers. A toute suite finie $s=(n_0,\ldots,n_k)$, on associe l'entier naturel $\nu(s)=p_0^{n_0}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k+1}$. On vérifie aisément, que ν est une bijection de S sur $\mathbf{N}$, vérifiant $s<s'\Rightarrow\nu(s)\leq\nu(s')$. Nous allons construire, par récurrence, pour tout $k=\nu(u)$ un ensemble E_u, et des parties finies $A^k_{\widehat{sn}}$ de $\mathbf{N}$ tels que

(α) si $k'>k$, $A^{k'}_{\widehat{sn}}\supset A^k_{\widehat{sn}}$,

(β) si $m\neq n$, $A^k_{\widehat{sm}}\cap A^k_{\widehat{sn}}=\varnothing$,

(γ) si $t>\widehat{sn}$ et $\nu(t)\leq k$, $E_t\backslash E_s\subset\bigcup_{j\in A^k_{\widehat{sn}}}W_j^{(s)}$,

(δ) si $\nu(\widehat{sn})>k$, $A^k_{\widehat{sn}}=\varnothing$.

On pose $E_\varnothing=\{0\}$. Grâce au Lemme 8, on construit $(W_j^{\varnothing})_{j\in\mathbf{N}}$ vérifiant (ii). A cette étape de la construction, il n'y a que la condition (δ) qui est vérifiée. Supposons la construction effectuée pour tout $k<n=\nu(s)$, et effectuons la construction pour s. On a donc construit:

–des ensembles E_u, pour $\nu(u)<\nu(s)$, vérifiant (i),

–des partitions $(W_j^{(u)})_{j\in\mathbf{N}}$, pour $\nu(u)<\nu(s)$, vérifiant (ii),

–des parties finies de $\mathbf{N}$, $A^k_{\widehat{up}}$, vérifiant (α), (β), (γ), et (δ).

On a $s=\widehat{rm}$, par exemple. Il faut trouver $t^{(s)}_{|r|}$, élément de $G\backslash E_r$ et extrait de la suite $(x_k)_{k\geq 0}$, pour construire

$$E_s=E_r\cup\{E_r+t^{(s)}_{|r|}\}\cup\{E_r-t^{(s)}_{|r|}\}\quad \text{si } 2t^{(s)}_{|r|}\neq 0$$

ou

$$E_s=E_r\cup\{E_r+t^{(s)}_{|r|}\}\quad \text{si } 2t^{(s)}_{|r|}=0$$

et il faut construire les $A^n_{\widehat{up}}$ vérifiant (α), (β), (γ), et (δ).

Pour simplifier les notations, posons $t^{(s)}_{|r|}=t$. Soit x élément de E_r, $x\neq 0$. Il existe une suite u, de longueur maximale, pour laquelle on a: $x\in E_r\backslash E_u\subset\bigcup_{j\in A^{n-1}_{\widehat{up}}}W_j^{(u)}$ si $\widehat{up}<r(*)$. Nous allons trouver t et $A^n_{\widehat{up}}$ tels que

(a) pour tout x vérifiant $(*)$

$$x+t\in\bigcup_{j\in A^n_{\widehat{up}}}W_j^{(u)}\quad \text{si } \widehat{up}<r,$$

$$x-t\in\bigcup_{j\in A^n_{\widehat{up}}}W_j^{(u)}\quad \text{si } \widehat{up}<r,$$

la deuxième condition pouvant être nulle

(b)

$$t \in \bigcup_{j \in A^n_{\widehat{up}}} W_j^{(u)}, \quad -t \in \bigcup_{j \in A^n_{\widehat{up}}} W_j^{(u)},$$

la deuxième condition pouvant être nulle.

D'après la condition (δ), il suffit de construire les $A^n_{\widehat{up}}$ vérifiant (α), (β) et (γ) pour $\nu(\widehat{up}) \leq n$.

La suite (x_k) tend vers 0, donc, pour tout x vérifiant $(*)$, la suite $x + t$, où $t \in (x_k)$, tend vers x (il en est de même pour la suite $x - t$). Si $x \in \bigcup_{j \in A^{n-1}_{\widehat{up}}} W_j^{(u)}$, pour t suffisamment grand, puisque $\bigcup_{j \in A^{n-1}_{\widehat{up}}} W_j^{(u)}$ est ouvert, en peut avoir $(x+t)$, (respectivement $x-t$) élément de $\bigcup_{j \in A^{n-1}_{\widehat{up}}} W_j^{(u)}$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels x, on peut trouver t tel que (a) soit vérifié, dès que $A^n_{\widehat{up}} \supset A^{n-1}_{\widehat{up}}$.

Pour que la condition (b) soit vérifiée, il faut que l'on puisse trouver t dans la suite (x_k) tel que pour tout $\widehat{up} < s$, t soit dans un $W^{(u)}_{j(\widehat{up})}$ et $-t$ soit dans un $W^{(u)}_{j'(\widehat{up})}$ qui n'aient pas déjà été choisis. Il suffit alors de poser $A^n_{\widehat{up}} = A^{n-1}_{\widehat{up}} \cup \{j(\widehat{up}), j'(\widehat{up})\}$ pour avoir le résultat, puisque les $W_j^{(u)}$ forment des partitions de $G \backslash E_u$.

Pour chaque u, telle que $\nu(u) < \nu(s)$, il n'y a qu'un nombre fini de $W_j^{(u)}$ qui ont été choisis. Supposons, qu'à partir d'un certain rang, tous les éléments de la suite (x_k) soient dans la réunion de ces $W_j^{(u)}$ $(\nu(u) < \nu(s))$. Alors, il existe un $W_j^{(u)}$ contenant un nombre infini d'éléments de la suite (x_k). Donc, il existe une suite extraite qui se trouve dans l'un des $W_j^{(u)}$. Cette suite extraite converge vers 0, et, $W_j^{(u)}$ étant fermé, doit contenir cette limite. Or, ceci est impossible par construction de $W_j^{(u)}$. Il y a donc une infinité d'éléments de (x_k) en dehors des $W_j^{(u)}$ déjà choisis. S'il y a une infinité d'éléments de la suite (x_k) qui ne sont pas d'ordre 2, un raisonnement analogue au précédent montre qu'il y a une infinité d'éléments t de la suite tels que t et $-t$ soient en dehors des $W_j^{(u)}$ déjà choisis. On choisit donc t, $j(\widehat{up})$ et $j'(\widehat{up})$, pour $\widehat{up} < s$ tels que la condition (b) soit satisfaite. On achève ainsi la construction de E_s, et des $A^n_{\widehat{up}}$ vérifiant (α), (β), (γ), et (δ) au rang n. E_s vérifie (i). Ensuite, le Lemme 8 permet de construire la partition $(W_j^{(s)})_{j \in \mathbf{N}}$ vérifiant (ii). Il suffit alors de poser $U_{\widehat{sn}} = \bigcup\{W_j^{(s)} | j \in \bigcup_k A^k_{\widehat{sn}}\}$ pour que (iii) soit vérifiée.

Ceci achève la démonstration du théorème.

THEOREME 10. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable. $R(G)$ n'est pas borélien.*

DEMONSTRATION. Soit (t_k) une suite d'éléments non nuls de G tendant vers 0 pour τ^*. On peut, par induction, à partir de la suite (t_k), construire une suite dissociée (x_k) tendant vers 0 pour τ^* [**G-McG**, Lemma 7.1.1] A partir de cette suite (x_k), on effectue la construction donnée par le Théorème 9.

Soit T un arbre sur $\mathbf{N}$. Posons $F(T) = \bigcup_{s\in T} E_s$.

(a) Nous allons montrer: $F(T)$ est un ensemble de Riesz si, et seulement si, T est bien fondé.

(1) Si T admet une branche infinie, $F(T)$ contient un ensemble de la forme $\{\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k x'_k | \varepsilon_k = -1, 0, 1 \text{ si } 2x'_k \neq 0,\ \varepsilon_k = 0, 1 \text{ si } 2x'_k = 0\}$ où la suite (x'_k) est une suite dissociée, extraite de la suite (x_k). D'après le Théorème 7, $F(T)$ n'est pas un ensemble de Riesz.

(2) Supposons que $F(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. Pour $s \in S$, on pose $F_s(T) = \bigcup_{u>s} E_u$.

D'après la construction effectuée au théorème précédent, on a

$$F_s(T) \subset E_s \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_{\widehat{sn}} \right).$$

Nous allons montrer que T contient une branche infinie. On a

$$F(T) = \bigcup_n F_{\langle n\rangle}(T).$$

Montrons qu'il existe $\langle n_0\rangle \in T$, telle que $F_{\langle n_0\rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. Supposons que ceci soit faux. Soit $x \in G \backslash E_\varnothing$. x est dans l'un des $W_j^{(\varnothing)}$, soit $W_{j(x)}^{(\varnothing)}$. D'après la construction effectuée au Théorème 9, $W_{j(x)}^{(\varnothing)} \cap F(T) = \varnothing$ ou, il existe $\langle n\rangle$ tel que $j(x) \in \bigcup_k A_n^k$ et $W_{j(x)}^{(\varnothing)} \cap F(T) \subset F_{\langle n\rangle}(T)$. On en déduit que $W_{j(x)}^{(\varnothing)} \cap F(T)$ est un ensemble de Riesz. Puisque les $W_{j(x)}^{(\varnothing)}$ sont des ouverts de G pour τ et $E_\varnothing$ est un ensemble de Riesz, d'après le Théorème 4, $F(T)$ est un ensemble de Riesz. Il existe donc bien n_0 telle que $F_{\langle n_0\rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. De plus, $\langle n_0\rangle \in T$ car sinon $F_{\langle n_0\rangle}(T)$ serait l'ensemble vide, donc un ensemble de Riesz.

Supposons qu'il existe $s \in T$ telle que $F_s(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz, et montrons que l'on peut trouver $n \in \mathbf{N}$, tel que $F_{\langle\widehat{sn}\rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz et tel que $\langle\widehat{sn}\rangle \in T$. On a $F_s(T) = \bigcup_n F_{\langle\widehat{sn}\rangle}(T)$. Supposons, que, pour tout n, $F_{\langle\widehat{sn}\rangle}(T)$ soit un ensemble de Riesz. Soit $x \in G\backslash E_s$. x est donc dans l'un des $W_j^{(s)}$, soit $W_{j(x)}^{(s)}$. Comme précédemment, en utilisant le Théorème 9, on montre que $W_{j(x)}^{(s)} \cap F_s(T)$ est un ensemble de Riesz. Les $W_{j(x)}^{(s)}$ étant des ouverts de G pour la topologie τ et E_s étant un ensemble de Riesz, une nouvelle utilisation du Théorème 4 montre que $F_s(T)$ est un ensemble de Riesz. Donc, il existe bien n tel que $F_{\langle\widehat{sn}\rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. Puisque $F_{\langle\widehat{sn}\rangle}(T)$ ne peut pas être vide, $\langle\widehat{sn}\rangle \in T$.

Donc, pour toute suite finie $s \in T$ telle que $F_s(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\langle\widehat{sn}\rangle \in (T)$, et $F_{\langle\widehat{sn}\rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz.

On en déduit l'existence d'une suite infinie d'entiers σ, telle que, pour toute section commençante s de σ, $F_s(T)$ soit non vide et ne soit pas un ensemble de Riesz et $s \in T$. σ est donc une branche infinie pour T.

Ceci achève la partie (a) de la démonstration.

(b) On montre facilement que l'application F de $\mathcal{T}$ dans 2^G définie par $F(T) = \bigcup_{s\in T} E_s$, est de première classe.

Si $R(G)$ était borélien, son image réciproque par F serait un borélien de $\mathcal{T}$. Or, cette image réciproque est l'ensemble des arbres bien fondés sur $\mathbf{N}$ qui, d'après le Théorème 2, n'est pas borélien. Donc $R(G)$ n'est pas borélien.

THEOREME 11. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable. $R(G)$ est un ensemble coanalytique dans 2^G.*

DEMONSTRATION. 2^G est un espace polonais. $\mathcal{M}^1(\hat{G})$, muni de la topologie vague, est également un espace polonais.

Or, $\Lambda \subset G$ est un ensemble de Riesz, si et seulement si,

$$\forall \mu \in \mathcal{M}^1(\hat{G}) \quad (\forall x \in G \ (x \notin \Lambda \Rightarrow \hat{\mu}(x) = 0)) \Rightarrow \mu \ll m$$

or, μ est absolument continue par rapport à m si, et seulement si, $|\mu|$ est absolument continue par rapport à m, c'est-à-dire si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall B \text{ borélien} \qquad m(B) < \eta \Rightarrow |\mu|(B) < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall k > 0 \quad \exists p > 0 \quad \forall B \text{ borélien} \qquad m(B) < \frac{1}{p} \Rightarrow |\mu|(B) < \frac{1}{k}.$$

De plus, il suffit de faire la vérification sur les réunions finies d'ouverts de base. Ces réunions sont dénombrables car $\hat{G}$, étant un compact métrisable, admet une base dénombrable.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'ensemble de ces réunions finies d'ouverts de base. $\Lambda \subset G$ est un ensemble de Riesz si, et seulement si,

$$\begin{aligned}&\forall \mu \in \mathcal{M}^1(\hat{G}) \quad (\forall x \in G \ (x \notin \Lambda \Rightarrow \hat{\mu}(x) = 0)) \\ &\qquad \Rightarrow \left(\forall k > 0 \ \exists p > 0 \ \forall n \ m(U_n) < \frac{1}{p} \Rightarrow |\mu|(U_n) < \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Considérons le borélien suivant de $\mathcal{M}^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \bigcup_{x\in G} \bigcap_{k>0} \bigcup_{p>0} \bigcap_{n\geq 0} \Bigg(&\{\mu | \hat{\mu}(\gamma) \neq 0\} \times \{\Lambda | x \notin \Lambda\} \times 2^G \cup \mathcal{M}^1(\hat{G}) \times 2^G \\ &\times \left\{U_n | m(U_n) \geq \frac{1}{p}\right\} \cup \left\{\mu |\, |\mu|(U_n) < \frac{1}{k}\right\} \times 2^G \times 2^G \Bigg).\end{aligned}$$

Le complémentaire de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^c$, est un borélien de $\mathcal{M}^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$. La projection de $\mathcal{B}^c$ sur le deuxième facteur de $\mathcal{M}^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$ est un ensemble analytique de 2^G, soit $\mathcal{A}$. Or, $R(G) = \mathcal{A}^c$, donc $R(G)$ est coanalytique dans 2^G.

COROLLAIRE 12. *Si G est un groupe abélien discret dénombrable, $R(G)$ est un ensemble coanalytique non borélien dans 2^G.*

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Jean Saint Raymond pour le temps qu'il a bien voulu m'accorder, et tout l'intérêt qu'il a porté à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier également Monsieur le Professeur Gilles Godefroy pour les indications qu'il m'a données sur les ensembles de Riesz.

BIBLIOGRAPHIE

[**D**] C. Dellacherie, *Ensembles analytiques: théorèmes de séparation et applications*, Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in Math., vol. 465, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975, pp. 336–372.

[**G-McG**] C. G. Graham and O. C. McGehee, *Essays in commutative harmonic analysis*, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1979.

[**M**] Y. Meyer, *Spectres des mesures et mesures absolument continues*, Studia Math. **30** (1968), 87–99.

[**R1**] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts, no. 12, Wiley, New York, 1962.

[**R2**] ——, *Real and complex analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS 6, 4, PLACE JUSSIEU T/46/0 - 4ÈME ÉTAGE, 75256 PARIS CEDEX 05, FRANCE